Journal of Number Theory 129 (2009) 2647–2658

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Number Theory

www.elsevier.com/locate/jnt

Une approche séquentielle de l'hypothèse de Riemann généralisée

An approach of generalised Riemann hypothesis through sequences

Anne de Roton

Institut Elie Cartan UMR 7502, Nancy Université, CNRS-INRIA, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

ARTICLE INFO

Article history:
Reçu le 24 août 2006
Révisé le 22 mai 2009
Disponible sur Internet le 28 juillet 2009
Communiqué par J. Brian Conrey

RÉSUMÉ

Une généralisation du théorème de Beurling et Nyman établit que l'hypothèse de Riemann pour une fonction F de la classe de Selberg est équivalente à l'appartenance de la fonction χ, indicatrice de l'intervalle $]0,1[$ à l'adhérence d'un sous-espace de fonctions $\mathcal{B}_F$ dans l'espace $L^2(0,+\infty)$. Dans cet article, l'auteur étend aux fonctions F de la classe de Selberg un résultat de Báez-Duarte en donnant une construction d'une suite de $\mathcal{B}_F$ qui, sous l'hypothèse de Riemann pour la fonction F, converge dans $L^2(0,+\infty)$ vers la fonction χ.

ABSTRACT

A generalisation of the Beurling and Nyman criterion implies that the Riemann hypothesis for a function F in the Selberg class is equivalent to the statement that χ, the characteristic function of $(0,1)$ belongs to the adherence in $L^2(0,+\infty)$ of a subspace $\mathcal{B}_F$. In this article, the author generalises a result of Báez-Duarte to the Selberg class and gives a construction of some sequence of $\mathcal{B}_F$ converging to χ in $L^2(0,+\infty)$ under Riemann hypothesis for F.

Adresse e-mail : deroton@iecn.u-nancy.fr.

0022-314X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jnt.2009.05.017

1. Présentation des résultats ; historique

Le théorème de Beurling et Nyman (cf. [Be] et [BS1] pour une analyse) établit une correspondance entre des régions sans zéro de la fonction ζ de Riemann et la densité de l'espace de fonctions $\widetilde{\mathcal{B}}$ suivant

$$\widetilde{\mathcal{B}}=\left\{t\mapsto\sum_{k=1}^{n}c_k\left\{\frac{\theta_k}{t}\right\},\ n\in\mathbb{N},\ c_k\in\mathbb{C},\ 0<\theta_k\leqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}c_k\theta_k=0\right\},$$

où $\{.\}$ représente la fonction partie fractionnaire.

Il établit en particulier que pour tout nombre réel $p>1$, l'absence de zéro de ζ dans le demi-plan $\Re(s)>1/p$ est équivalente à l'appartenance de la fonction χ indicatrice de l'intervalle $]0,1[$ à l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans $L^p(0,1)$. Bercovici et Foias étendent dans [BF] ce résultat au cas $p=1$.

L'étude des régions sans zéro de la fonction ζ de Riemann est donc liée à la recherche de suites $(f_n)_n$ de fonctions de $\widetilde{\mathcal{B}}$ telles que la norme $\|\chi-f_n\|_p$ tende vers 0. La formule $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\{1/kt\}=-1$ pour $0<t\leqslant 1$, issue de formules classiques sur la fonction μ de Möbius, conduit naturellement à considérer les sommes partielles

$$S_n(t)=-\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\{1/kt\}.$$

Dans [BD1], Báez-Duarte modifie les fonctions $(S_n)_n$ pour obtenir des fonctions B_n de $\widetilde{\mathcal{B}}$ qui, sous l'hypothèse de non-annulation de ζ dans le demi-plan $\{\Re s>1/p\}$, convergent vers χ dans l'espace $L^r(0,1)$ pour tout réel r vérifiant $1<r<2-1/p$. Balazard et Saias montrent dans [BS1] que cette hypothèse de non-annulation est en fait équivalente à la convergence de la suite de fonctions $(B_n)_n$ vers χ dans $L^r(0,1)$ pour tout r vérifiant $0<r<p$.

Nous nous intéressons dans cet article au cas $p=2$, essentiellement dû à Nyman et détaillé dans [BS2], du théorème de Beurling et Nyman qui fournit, par symétrie des zéros de ζ, un critère d'analyse fonctionnelle pour l'hypothèse de Riemann (HR).

Notant $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\left\{\frac{\theta_k}{t}\right\},\quad \text{avec } n\in\mathbb{N},\ c_k\in\mathbb{C},\ 0<\theta_k\leqslant 1,$$

les auteurs de [BDBLS] reformulent ce critère dans $L^2(0,+\infty)$: HR est équivalente à l'appartenance de la fonction χ à l'adhérence de $\mathcal{B}$ dans $L^2(0,+\infty)$. Báez-Duarte démontre dans l'article [BD2] que, même sous HR, les suites naturelles $(B_n)_n$ et $(S_n)_n$ divergent dans $L^2(0,+\infty)$. En lissant la suite $(S_n)_n$, il parvient néanmoins dans [BD3] à construire une suite $(F_n)_n$ de $\mathcal{B}$ qui converge vers χ dans $L^2(0,+\infty)$. La construction explicite de cette suite, qui garantit une certaine vitesse de convergence, est dûe à Balazard. Báez-Duarte démontre ainsi que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion : $\chi\in\overline{\mathcal{B}^{nat}}$ où $\mathcal{B}^{nat}$ désigne le sous-espace des fonctions de $\mathcal{B}$ pour lesquelles les θ_k sont des inverses d'entiers positifs.

Nous avons étendu dans [dR2] le théorème de Beurling et Nyman dans le cas $p=2$ aux fonctions de la classe de Selberg. Nous allons dans cet article étendre le résultat de Báez-Duarte et Balazard, présenté dans [BD3] à cette même classe de fonctions.

Commençons par rappeler la définition de la classe de Selberg S, introduite en 1989 dans [S], et qui est conjecturalement l'ensemble des fonctions L de formes automorphes.

Définition 1. On dit qu'une fonction F appartient à la classe de Selberg S si F vérifie les conditions suivantes :

1. Pour $\Re s > 1$, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ est une série de Dirichlet absolument convergente ;
2. il existe un entier naturel m tel que $(s-1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini ;
3. la fonction F satisfait une équation fonctionnelle de la forme :

$$\Phi(s) = \omega\overline{\Phi(1-\bar{s})} \quad \text{où} \quad \Phi(s) = Q^s \Delta(s) F(s),$$

avec $\Delta(s) = \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $\lambda_j > 0$, $\Re\mu_j \geqslant 0$, $Q > 0$ et $|\omega| = 1$;
4. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $M(\varepsilon)$ tel que $|a(n)| \leqslant M(\varepsilon)n^{\varepsilon}$;
5. pour $\Re s$ assez grand, $\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b(n)n^{-s}$ où $b(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b(n) = O(n^{\theta})$ pour un $\theta < 1/2$.

Étudiée dans de nombreux articles, la classe de Selberg est en particulier l'objet dans [KP0] d'un survol de Kaczorowski et Perelli.

Notations 1. On note $d = 2\sum_{j=1}^{r} \lambda_j$ le degré de F, m_F l'ordre du pôle éventuel de F en $s = 1$ et $\overline{f}$ la fonction $s \mapsto \overline{f(\bar{s})}$.

L'assertion 5 implique que la fonction F admet un développement en produit Eulérien de la forme $F(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} F_p(s)$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $F_p(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta(k)p^{-ks}$.

On distingue parmi les zéros d'une fonction F de la classe de Selberg les zéros de la forme $-(n+\mu_j)/\lambda_j$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in [1, r]$, que l'on appelle zéros triviaux de F. Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle comprise entre 0 et 1. La droite d'équation $\Re s = 1/2$ est appelée droite critique.

Conjecture 1. *Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle égale à* $1/2$.

C'est ce que l'on appelle hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction F(HRG).

Afin de caractériser l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction F de la classe de Selberg, nous définissons la fonction complémentaire associée à F par

$$\Psi_F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \\ x \mapsto \operatorname{Res}(\frac{x^s}{s}F(s), 1) - \sum_{n\leqslant x} a(n), \end{array}$$

la fonction $\Psi_F^{(1)}$ par $\Psi_F^{(1)}(x) = \Psi_F(1/x)$ et le sous-espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{B}_F = \left\{ f\colon t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_F\left(\frac{\theta_k}{t}\right),\ n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [1, n],\ c_k \in \mathbb{C},\ 0 < \theta_k \leqslant 1 \right\}.$$

Nous avons démontré dans [dR2] que pour une fonction F de S, (HRG) est équivalente à

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty) \quad \text{et} \quad \chi \in \overline{\mathcal{B}_F}.$$

La démonstration de ce résultat est essentiellement basée sur la formule suivante.

$$\mathcal{M}\Psi_F^{(1)}(s) = -\frac{F(s)}{s}, \quad \text{pour } \frac{1}{2} < \Re s < 1, \tag{1}$$

où $\mathcal{M}f$, la transformée de Mellin de f, est définie par $\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}\,dt$. La condition $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty)$ est vérifiée pour les fonctions F de S de degré $d < 4$ (voir [dR1]).

Nous démontrons dans cet article le résultat suivant, qui est une extension du résultat de Báez-Duarte et Balazard.

Théorème I. *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Notons $(a^{-1}(n))_{n\geqslant 1}$ les coefficients de sa série de Dirichlet inverse F^{-1}. Alors il existe un entier positif N_0 tel que pour tout entier $N \geqslant N_0$, la distance dans $L^2(0,+\infty)$ entre la fonction χ, indicatrice de l'intervalle $]0,1[$, et la fonction*

$$x \mapsto -\sum_{n=1}^{N} a^{-1}(n) e^{-a\frac{\log n}{\log\log N}} \Psi_F(1/nx),$$

où a désigne une constante dépendant uniquement de F, est $O((\log\log N)^{-1/3})$.

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soit F une fonction de la classe de Selberg. Alors l'hypothèse de Riemann pour F est équivalente à la propriété :*

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty) \quad et \quad \chi \in \overline{\mathcal{B}_F^{nat}},$$

où $\mathcal{B}_F^{nat}$ est le sous-ensemble des fonctions f de $\mathcal{B}_F$, définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_F\left(\frac{1}{kt}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,\ c_k \in \mathbb{C}.$$

Afin d'obtenir ces résultats, nous étudierons dans la partie 2 l'ordre de grandeur de l'inverse d'une fonction F de S ainsi que des coefficients $a^{-1}(n)$. La partie 3 sera consacrée à la démonstration du théorème I.

Notations 2. Dans toute la suite, s désignera un nombre complexe de partie réelle σ et de partie imaginaire τ et F sera une fonction de S. De plus, les constantes implicites dans les notations O et $\ll$ ne dépendront que de la fonction F.

L'auteur souhaite remercier chaleureusement Michel Balazard qui a encadré ce travail en thèse ainsi que Bruno Martin et Alberto Perelli pour des conversations mathématiques éclairantes. Elle exprime également ici sa gratitude à l'égard du « lecteur-arbitre » anonyme auquel la forme finale de cet article doit beaucoup.

2. Inverse d'une fonction de la classe de Selberg

L'inverse de F est une série de Dirichlet formelle dont les coefficients, que l'on note $a^{-1}(n)$, sont définis par (voir sections I.2.3 et I.2.4 de [Te])

$$\begin{cases} a^{-1}(1) = 1, \\ a^{-1}(n) = \sum_{d\mid n, d<n} a(n/d)a^{-1}(d) \quad (n>1). \end{cases} \tag{2}$$

2.1. *Ordre de grandeur des coefficients*

Les axiomes 4 et 5 et la relation (2) permettent d'obtenir, à l'aide de démonstrations par récurrence, des majorations de la taille des coefficients $a^{-1}(n)$. On obtient ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, la majoration $|a^{-1}(n)| \ll_\varepsilon n^{1+\theta+\varepsilon}$. La proposition suivante permet d'améliorer cette majoration si on suppose que la fonction F vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée. Elle est en fait valable même si l'axiome 4 de la définition de S n'est pas vérifié.

Proposition 2.1. *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Alors F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $\sigma_c \leqslant 1/2$. On a donc en particulier*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a^{-1}(n) = O_\varepsilon\big(n^{1/2+\varepsilon}\big). \tag{3}$$

Démonstration. La fonction F^{-1} est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > 1/2$. D'après [L], *Satz* 5, F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c finie. Une application d'un lemme similaire au *Satz* 4 de [L] à la fonction

$$h(s) = F(s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{m_F}$$

qui est holomorphe sans zéro dans le demi-plan $\sigma > 1/2$, tend vers 1 uniformément en τ lorsque σ tend vers l'infini et vérifie que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel $c = c(\delta)$ tel que $h(s) = O((1+|\tau|)^c)$ uniformément pour $\sigma \geqslant 1/2 + \delta$ et $\tau \in \mathbb{R}$, fournit pour tout $\varepsilon > 0$ la majoration

$$1/h(s) = O_\varepsilon\big(\big(1+|\tau|\big)^\varepsilon\big) \quad (\sigma > 1/2).$$

La même majoration vaut pour F^{-1} et on peut donc conclure en appliquant le théorème de Landau–Schnee (voir [Te, section II.2.2]) à la fonction F^{-1}. □

Sous l'hypothèse, conjecturalement vraie pour toutes les fonctions F de la classe de Selberg, que pour tout nombre premier p, $F_p(s)^{-1}$ est un polynôme en p^{-s} de degré r indépendant de p, on peut montrer par des arguments classiques

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{-1}(n) = O_\varepsilon\big(n^\varepsilon\big). \tag{4}$$

Cette majoration de la taille des coefficients $a^{-1}(n)$ est en fait valable inconditionnellement pour des entiers criblés, comme l'atteste le *lemma* 1 de [KP1]. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\big(n, P\big(z(\varepsilon)\big)\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad \big|a^{-1}(n)\big| \leqslant n^\varepsilon, \quad \text{avec } P(z) = \prod_{p \leqslant z} p. \tag{5}$$

Cette majoration et un argument semblable à celui de R. Murty dans sa démonstration d'une majoration de $b(p^k)$ dans [M] permettent d'obtenir la majoration suivante. Ce résultat sera publié dans le livre [KP2], actuellement en cours d'écriture. Cet ouvrage n'étant pas encore disponible, nous donnons ici une démonstration succincte de cette majoration.

Proposition 2.2. *Pour tout réel $\beta > \theta$, il existe une constante positive C, ne dépendant que de β et θ tels que pour tout entier positif n, on ait*

$$\big|a^{-1}(n)\big| \leqslant Cn^\beta,$$

où $\theta < 1/2$ est défini à l'axiome 5 de la classe de Selberg.

Démonstration. Soit β un réel vérifiant $\theta < \beta$ et H un réel tel que $|b(n)| \leqslant Hn^\theta$ pour tout entier positif n. La majoration (5) de [KP1] assure l'existence d'un réel $z = z(\beta)$ tel que pour tout entier positif n premier avec z, on ait $|a^{-1}(n)| \leqslant n^\beta$.

Montrons à présent qu'il existe une constante positive K telle pour tout nombre premier p et tout entier naturel m, on ait $|a^{-1}(p^m)| \leqslant Kp^{m\beta}$. Le fait que la suite $(a^{-1}(n))_n$ soit multiplicative permet alors de conclure puisque l'on a

$$\left|a^{-1}(n)\right| \leqslant K^{z(\beta)} n^{\beta}.$$

Un calcul de la dérivée logarithmique de F^{-1} permet d'obtenir pour tout nombre premier p et tout entier $m \geqslant 1$ l'égalité suivante.

$$ma^{-1}\left(p^m\right) = -\sum_{k=1}^{m} kb\left(p^k\right)a^{-1}\left(p^{m-k}\right). \tag{6}$$

Fixons à présent le nombre premier p. Une récurrence sur m et la majoration de l'axiome 5 permettent d'obtenir la majoration $|a^{-1}(p^m)| \leqslant A_m p^{m\theta}$ où $(A_m)_m$ est défini par $A_0 = 1$ et pour $m \geqslant 1$,

$$mA_m = H\sum_{k=1}^{m} kA_{m-k}. \tag{7}$$

La relation de récurrence (7) permet de calculer la série génératrice associée à la suite $(A_m)_m$

$$A(z) := \sum_{m\geqslant 0} A_m z^m = \exp\left(\frac{Hz}{1-z}\right),$$

donc d'obtenir l'expression suivante de A_m pour $m \geqslant 1$,

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m-1}{n-1} \frac{H^n}{n!}.$$

L'utilisation de la formule de Stirling réelle assure alors l'existence d'une constante positive A ne dépendant que de H telle que pour tout nombre premier p et tout entier naturel m, on ait

$$\left|a^{-1}\left(p^m\right)\right| \leqslant Ae^{4\sqrt{Hm}} p^{m\theta}.$$

La suite $(Ae^{4\sqrt{Hm}}2^{-m\varepsilon})_m$ étant bornée, on obtient bien le résultat annoncé. □

2.2. Majoration de l'inverse d'une fonction de S

2.2.1. Majorations classiques

Commençons par donner quelques estimations classiques, dont les démonstrations sont analogues à celles de l'étude de la fonction ζ que Titchmarsh a menée dans [Ti], chapitres IX et XIV. Le lecteur pourra consulter [dR0] pour une démonstration détaillée de ces résultats.

Définition 2. Pour $T > 0$, on définit $N_F(T)$, le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de F vérifiant $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $0 < \gamma \leqslant T$.

On a classiquement

$$N_F(T+1) - N_F(T) = O(\log T) \quad (T > 0). \tag{8}$$

Notations 3. Pour tout réel t, on note

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\log(|t|+3)}{\log\log(|t|+3)}.$$

Si F vérifie HRG, alors

– il existe une constante $k_1 > 0$ telle que

$$\left|F(\sigma+i\tau)\right| \leqslant e^{k_1\mathcal{L}(\tau)}; \tag{9}$$

– il existe une constante $k_2 > 0$ telle que

$$\left|F(\sigma+i\tau)\right|^{-1} \leqslant e^{k_2\mathcal{L}(\tau)/(\sigma-1/2)} \tag{10}$$

pour $1/2 < \sigma \leqslant 1$ et $|\tau| \geqslant 3$;

– il existe deux constantes positives absolue c_1 et c_2 telles que, pour tous nombres réels σ et τ vérifiant :

$$|\tau| \geqslant 3, \qquad \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log\log|\tau|} \leqslant \sigma \leqslant 1,$$

on a

$$\left|F(\sigma+i\tau)\right|^{-1} \leqslant e^{c_2\mathcal{L}(\tau)}. \tag{11}$$

2.2.2. Majoration du quotient $F(s)/F(s+A)$ sur la droite critique

Dans son article [Bu], Burnol donne une majoration uniforme de $\zeta(s)/\zeta(s+A)$ sur la droite critique. Nous allons ici généraliser cette majoration pour une fonction de la classe de Selberg.

Proposition 2.3. *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG et A un réel vérifiant $0 \leqslant A \leqslant 1/2$. Alors, sur la droite critique, on a*

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}\right| = O\big(|z|^{Ad/2}\big).$$

Démonstration. Soit $0 < A \leqslant 1/2$. Pour $\Re(s) \geqslant 1/2$, on considère la fonction

$$h_A(s) = \frac{(s-1-A/2)^{m_F} F(s-A/2)}{(s-1+A/2)^{m_F} F(s+A/2)} \frac{1}{s^{dA/2}}.$$

– Si $s = 1/2+i\tau$, alors $z := s+A/2 = (1+A)/2+i\tau$ vérifie $1/2 < \Re z \leqslant 3/4$ et en utilisant l'équation fonctionnelle de F et le lemme 3.2 de [dR1], on obtient :

$$\left|\frac{F(s-A/2)}{F(s+A/2)}\right| = \left|\frac{\overline{F}(1-z)}{F(z)}\right| = \left|Q^{2z-1}\frac{\Delta(z)}{\overline{\Delta}(1-z)}\right| = O\big(|z|^{d(\Re z-1/2)}\big) = O\big(|s|^{dA/2}\big),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de F. On a donc $h_A(s) = O(1)$ sur la droite critique, uniformément pour $0 \leqslant A \leqslant 1/2$.

– D'autre part, $\lim_{\sigma\to+\infty} F(s)=1$, donc il existe $\Lambda_0>1$, tel que pour tout $\sigma\geqslant\Lambda_0$ et tout $\tau\in\mathbb{R}$, on ait

$$\left|\frac{F(s-A/2)}{F(s+A/2)}\right|\leqslant 4 \quad \text{donc} \quad \left|h_A(s)\right|\leqslant 4|s|^{-dA/2}\leqslant 4\Lambda_0^{-dA/2}\leqslant 4.$$

Appliquant le principe de Phragmén–Lindelöf à la fonction h_A, holomorphe dans $\{\sigma\geqslant 1/2\}$ entre $\{\Re s=1/2\}$ et $\{\Re s=\Lambda_0\}$, on obtient $h_A(s)=O(1)$ uniformément pour A tel que $0\leqslant A\leqslant 1/2$ et s tel que $1/2\leqslant\sigma\leqslant\Lambda_0$. En particulier, pour $s=(1+A)/2+i\tau$ et donc $z=s-A/2=1/2+i\tau$, on a

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}\right|=O\left(|z|^{Ad/2}\right),$$

uniformément par rapport à A tel que $0\leqslant A\leqslant 1/2$. □

Cette majoration permettra de pallier l'absence de majoration uniforme de $|F(s)|^{-1}$ pour $\sigma>1/2$.

3. Explicitation d'une suite de $\mathcal{B}_F$ tendant vers χ dans $L^2(0,+\infty)$

Comme dans le cas de la fonction ζ de Riemann, on définit la suite « naturelle »

$$S_{n,F}(t)=\sum_{k=1}^{n} a^{-1}(k)\Psi_F^{(1)}(kt)$$

et on la modifie par un procédé de construction analogue à celui que Báez-Duarte expose dans [BD3] afin d'obtenir une suite convergente de $L^2(0,+\infty)$.

Proposition 3.1. *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG. Alors il existe deux constantes positives a et b et un entier naturel N_0 ne dépendant que de F tels que, pour tous réels t, $\delta>0$ et tout entier $N\geqslant N_0$ vérifiant*

$$\frac{a}{\log\log N}\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2}$$

on ait uniformément

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{a^{-1}(n)}{n^{\frac{1}{2}+\delta+it}}=\frac{1}{F(\frac{1}{2}+\delta+it)}+O\left(N^{-\delta/3}\exp\left(b\left(\mathcal{L}(t)\right)\right)\right).$$

Démonstration. Dans cette démonstration, N_0 sera un entier assez grand et δ un réel tel que $0<\delta\leqslant 1/2$. D'après la proposition 2.2, il existe $\alpha\in]0,1/2[$ et $C>0$ tels que $|a^{-1}(n)|\leqslant Cn^{\alpha}$.

Les axiomes 4 et 5 assurent que la fonction F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue $\sigma_a\leqslant 1$.

En lui appliquant la formule de Perron effective (théorème II.2.3 de [Te]), puis un calcul classique semblable à celui de la démonstration du corollaire II.2.4 de [Te], on obtient pour $z=1/2+\delta+it$, $c=\frac{1}{2}+\alpha-\delta+1/\log 3N$ et pour tout entier N et tout réel T tel que $N\geqslant T\geqslant 2$,

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{a^{-1}(n)}{n^z}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}F^{-1}(s+z)\frac{N^s}{s}\,\mathrm{d}s+O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}+\alpha-\delta}}{T}\log N\right),$$

où $c:=\frac{1}{2}+\alpha-\delta+1/\log 3N$.

On supposera $N \geqslant N_0 = N_0(F, \alpha)$.

Déplaçons à présent le segment d'intégration à l'abscisse $c' = -\delta/2$ en appliquant le théorème des résidus. On obtient :

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{a^{-1}(n)}{n^z} = F(z)^{-1} + I_1 - I_- + I_+ + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}+\alpha-\delta}}{T} \log N\right), \tag{12}$$

où

$$I_\pm = \frac{1}{2i\pi} \int_{c' \pm iT}^{c \pm iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} \, \mathrm{d}s \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{c'-iT}^{c'+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} \, \mathrm{d}s.$$

– Si $|t| \leqslant N^{1/2+\alpha}$, on choisit $T = 2N^{1/2+\alpha}$. Le reste dans (12) est alors $O(N^{-\delta/3})$.
  Sur les segments horizontaux, on a $N^{1/2+\alpha} \leqslant |\tau + t|$ et donc, si $a \geqslant 4c_1$ et $N \geqslant N_0$, alors

$$\Re(s+z) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{a}{2 \log\log N} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log\log|t+\tau|}$$

  et d'après (11), on a

$$\left|F(s+z)\right|^{-1} \leqslant e^{c_2 \mathcal{L}(|t+\tau|)} \ll e^{2c_2 \mathcal{L}(N)}.$$

  La contribution des segments horizontaux est donc, pour N_0 assez grand

$$\ll \frac{1}{T} \exp\bigl(O\bigl(\mathcal{L}(N)\bigr)\bigr) \frac{N^{1/2+\alpha-\delta+1/\log 3N}}{\log N} \ll N^{-\delta+O(1/\log\log N)} \ll N^{-\delta/3}.$$

  La majoration (10) permet de majorer la contribution des $\tau \in [c' - iT, c' + iT]$ vérifiant $|t + \tau| \leqslant e^{\sqrt{\log N}}$ par

$$O\left(\frac{N^{-\delta/2}}{\delta} \exp\bigl(O(\sqrt{\log N})\bigr)\right) = O\bigl(N^{-\delta/3}\bigr).$$

  Sur le reste de l'intervalle $[c' - iT, c' + iT]$, on utilise (11) qui donne

$$F^{-1}(s+z) \leqslant \exp\bigl(O\bigl(\mathcal{L}\bigl(|t+\tau|\bigr)\bigr)\bigr) \ll \exp\bigl(O(\log N/\log\log N)\bigr).$$

  Comme

$$\int_{c'-iT}^{c'+iT} \frac{|\mathrm{d}s|}{|s|} \ll \log N,$$

  quitte à choisir a assez grand, on a une contribution de ces termes

$$\ll N^{-\delta/2} \log N \exp\bigl(O\bigl(\mathcal{L}(N)\bigr)\bigr) \ll N^{-\delta/3},$$

  ce qui conclut la démonstration dans ce premier cas.

– Si $|t| \geqslant N^{1/2+\alpha}$, on applique l'équation (12) en choisissant $T = \frac{1}{2}N^{1/2+\alpha}$. En remarquant que l'on a $|t+\tau| \asymp |t|$ sur tous les segments d'intégration, un raisonnement analogue au précédent permet de conclure la preuve. $\square$

Proposition 3.2. *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG. On a uniformément pour* $0 < A \leqslant 1/(2d)$,

$$\int_{\Re z=1/2} \left|\frac{F(z)}{F(z+A)} - 1\right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \ll A^{2/3}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.3, sur la droite critique on a

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}\right| = O\left(|z|^{Ad/2}\right),$$

uniformément par rapport à A tel que $0 \leqslant A \leqslant 1/2$. On peut donc supposer A inférieur à une constante positive donnée au préalable, le résultat étant trivial dans le cas contraire.

On note γ la partie imaginaire d'un zéro générique de F.

Soit δ tel que $0 < \delta \leqslant 1$, et $E_1 := \bigcup_\gamma [\gamma - \delta, \gamma + \delta]$; $E_2 := \mathbb{R} \setminus E_1$.

Si $t \in E_1$ et $A \leqslant 1/(2d)$, la proposition 2.3 et la formule (8) donnent, pour $z = 1/2 + it$:

$$\int_{\frac{1}{2}+iE_1} \left|\frac{F(z)}{F(z+A)} - 1\right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \ll \sum_\gamma \delta\gamma^{-3/2} \ll \delta.$$

D'autre part, avec le lemme α de [Ti, section 3.9] et la formule (8), on obtient pour $0 \leqslant x \leqslant A$ et $t \in E_2$:

$$\frac{F'}{F}\left(\frac{1}{2} + x + it\right) = \sum_{|t-\gamma| \leqslant 1} \frac{1}{x + i(t-\gamma)} + O\big(\log\big(|t|+3\big)\big) \ll \delta^{-1} \log\big(|t|+3\big),$$

donc

$$\log\left(\frac{F(\frac{1}{2}+it)}{F(\frac{1}{2}+A+it)}\right) = -\int_0^A \frac{F'}{F}\left(\frac{1}{2}+x+it\right) \mathrm{d}x \ll A\delta^{-1}\log\big(|t|+3\big).$$

En utilisant l'inégalité $|e^u - 1| \leqslant |u|e^{|u|}$, on en déduit

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)} - 1\right| \ll A\delta^{-1}\log\big(|t|+3\big)\big(|t|+3\big)^{c'A/\delta},$$

où c' est une constante positive absolue. Par conséquent,

$$\int_{\frac{1}{2}+iE_2} \left|\frac{F(z)}{F(z+A)} - 1\right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \ll A^2\delta^{-2} \int_{\mathbb{R}} \log^2\big(|t|+3\big)\big(|t|+3\big)^{2c'A/\delta-2} \ll A^2\delta^{-2},$$

pourvu que $A \leqslant \delta/4c'$, ce que nous supposerons. On choisit $\delta = A^{2/3}$ pour conclure, ce qui est possible si l'on suppose $A \leqslant (1/4c')^3$. $\square$

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème I donné en introduction.

Démonstration. Posons

$$f_{A,N}(x) := -\sum_{n=1}^{N} \frac{a^{-1}(n)}{n^A} \Psi_F(1/nx).$$

D'après (1), pour $1/2 < \Re z < 1$, on a

$$\mathcal{M} f_{A,N}(z) = \frac{F(z)}{z} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} \right).$$

Par ailleurs, pour $\Re z > 0$, on a $\mathcal{M}\chi(z) = -1/z$. Le théorème de Plancherel donne donc

$$\begin{aligned} \| f_{A,N} - \chi \|^2 &= \int_{\Re z = 1/2} \left| F(z) \sum_{n=1}^{N} \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - 1 \right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \\ &\leqslant 2 \int_{\Re z = 1/2} \left| F(z) \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - F(z+A)^{-1} \right) \right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} + 2 \int_{\Re z = 1/2} \left| \frac{F(z)}{F(z+A)} - 1 \right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \end{aligned}$$

en utilisant $(X+Y)^2 \leqslant 2(X^2+Y^2)$. D'après la proposition 3.1, si $A \geqslant a/\log\log N$ et $z = 1/2 + it$, on a

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - F(z+A)^{-1} \right| = O\left(N^{-A/3} \exp\big(b\mathcal{L}(t)\big) \right)$$

et d'après (9), on a $|F(z)| = \exp(O(\mathcal{L}(t)))$, donc

$$\int_{\Re z = 1/2} \left| F(z) \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}} - F(z+A)^{-1} \right) \right|^2 \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}$$

$$\ll N^{-2A/3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{O(\mathcal{L}(t))} \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{4} + t^2} \ll N^{-2A/3}.$$

En utilisant la proposition 3.2, on obtient donc

$$\| f_{A,N} - \chi \|^2 \ll N^{-2A/3} + A^{2/3}.$$

Le choix $A = a/\log\log N$ permet de conclure. $\square$

Références

[BD1] L. Báez-Duarte, On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis, Adv. Math. 101 (1993) 10–30.

[BD2] L. Báez-Duarte, A class of invariant unitary operators, Adv. Math. 144 (1999) 1–12.

[BD3] L. Báez-Duarte, A strengthening of the Nyman–Beurling criterion for the Riemann hypothesis, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 14 (1) (2003) 5–11, 1–12.

[BDBLS] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau, E. Saias, Note sur la fonction zeta de Riemann, III, Adv. Math. 149 (1) (2000) 130–144.

[BS1] M. Balazard, E. Saias, Note sur la fonction zeta de Riemann, I, Adv. Math. 139 (1998) 310–321.

[BS2] M. Balazard, E. Saias, The Nyman–Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis, Expo. Math. 18 (2000) 131–138.

[BF] H. Bercovici, C. Foias, A real variable restatement of Riemann's hypothesis, Israel J. Math. 48 (1984) 57–68.

[Be] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann Zeta-function, Proc. Natl. Acad. Sci. 41 (1955) 312–314.

[Bu] J.-F. Burnol, On an analytic estimate in the theory of the Riemann Zeta function and a theorem of Báez-Duarte, Acta Cient. Venezolana 54 (2003).

[dR0] A. de Roton, Généralisation du critère de Beurling–Nyman à la classe de Selberg, thèse, université Bordeaux 1, 2003, disponible sur www.iecn.u-nancy.fr/~deroton.

[dR1] A. de Roton, On the mean square of an error term for an extended Selberg's class, Acta Arith. 126 (1) (2007) 417–445.

[dR2] A. de Roton, Généralisation du critère de Beurling–Nyman pour l'hypothèse de Riemann généralisée, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (12) (2007) 6111–6126.

[KP0] J. Kaczorowski, A. Perelli, The Selberg class: A survey, in: Number Theory in Progress, vol. 2, Zakopane–Kościelisko, 1997, de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 953–992.

[KP1] J. Kaczorowski, A. Perelli, On the prime number theorem for the Selberg class, Arch. Math. 80 (2003) 255–263.

[KP2] J. Kaczorowski, A. Perelli, Introduction to the Selberg class of L-functions, livre en cours d'écriture.

[L] E. Landau, Über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ in der Halbene $\sigma > 1$, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I 36 (1933) 81–91.

[M] M.R. Murty, Stronger multiplicity one for Selberg's class, in: S.M. Drury, M.R. Murty (Eds.), Harmonic Analysis and Number Theory, in: CMS Conf. Proc., vol. 21, American Mathematical Society, Providence, 1997, pp. 133–142.

[S] A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in: Proceedings of the Almafi Conference on Analytic Number Theory, Università di Salerno, 1992.

[Te] G. Tenenbaum, Introduction à la Théorie Analytique et Probabiliste des Nombres, 3e édition, Belin, 2008.

[Ti] E.C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, University Press, Oxford, 1951.